2025 年湖北云学名校联盟高三年级 2 月联考

数学试卷

命题学校：天门中学　命题人：黄兵 吴威 薛德斌 杨占欣　审题人：云学研究院

考试时间：2025 年 2 月 17 日 15:00-17:00　时长：120 分钟　总分：150 分

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的.

1. $|2i+1|=$

A. 2　B. 5　C. 1　D. $\sqrt{5}$

2. 已知集合 $P=\left\{x\in N \middle| y=\dfrac{\sqrt{5-x}}{\ln(x-1)}\right\}$，则 P 的真子集个数为

A. 7　B. 8　C. 15　D. 16

3. 已知数列 $\{a_n\}$ 为等比数列，T_n 为数列 $\{a_n\}$ 前 n 项积，且 $T_2=\dfrac{1}{8}$，$T_6=8$，则 $T_4=$

A. 1　B. $\dfrac{1}{4}$　C. $\dfrac{1}{2}$　D. 2

4. 已知 $a=(3,m)$，$b=(1,-1)$，且 $a.b=2$，则 $|\vec{a}+\vec{b}|=$

A. 4　B. 2　C. $\sqrt{5}$　D. 1

5. 函数 $f(x)=\sin\left(\dfrac{\pi}{3}x\right)-2ax$ 在 R 上不单调，则 a 的取值范围是

A. $\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$　B. $\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$　C. $\left[-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{6}\right]$　D. $\left(-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{6}\right)$

6. 在四面体 ABCD 中，BA⊥平面 ACD, CA ⊥ AD, BA=3,AC=4,AD=5，该四面体 ABCD 外接球表面积为

A. 25π　B. 50π　C. 12.5π　D. 100π

7. 近年来，各地旅游事业得到飞速发展，越来越多的周边游客来参观天门市的陆羽故园、胡家花园、天门博物馆、黄潭七屋岭、海龙岛景区、西塔寺等 6 处景点。现甲、乙两位游客准备从 6 处景点各随机选一处游玩，记事件 A=“甲和乙至少有一个人前往陆羽故园”，事件 B=“甲和乙选择不同的景点”则 $P(B|A)=$

A. $\dfrac{8}{9}$　B. $\dfrac{9}{10}$　C. $\dfrac{10}{11}$　D. $\dfrac{11}{12}$

8. 已知双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>0,b>0\right)$ 的左右焦点分别为F_1，F_2，过 F_1 的直线与双曲线的左支交于 A,B 两点，若ΔABF_2 的周长为 $8a$ ，则双曲线离心率的取值范围为

A. $\left[\sqrt{3},+\infty\right)$　　B. $\left[\sqrt{2},+\infty\right)$　　C. $\left(1,\sqrt{2}\right]$　　D. $\left(1,\sqrt{3}\right]$

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分.

9. 某射击运动员在一次射击中射靶 5 次，命中的环数依次为 8，7，9，8，8，关于此次射击的成绩，以下论述中正确的是

A. 平均数是 8　　B. 中位数是 9　　C. 众数是 8　　D. 方差是 2

10. 记 $\min\left\{a,b\right\}=\begin{cases}a,a\le b\\ b,a>b\end{cases}$. 已知函数$f\left(x\right)=\min\left\{\sin x,\cos x\right\}$，则

A. $f\left(x\right)$的图象关于直线$x=\frac{\pi}{2}$对称

B. $f\left(x\right)$ 的最大值为$\frac{\sqrt{2}}{2}$

C. $f\left(x\right)$在 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4})$ 上单调递增

D. 方程$f\left(x\right)=m\left(m\in\mathbf{R}\right)$在$\left(0,2\pi\right)$上最多有 3 个解

11. 平面曲线的曲率就是针对曲线上某个点的切线方向角弧长的转动率，表明曲线偏离直线的程度. 曲率半径主要是用来描述曲线上某处曲线弯曲变化的程度.如：圆越小，曲率越大;圆越大，曲率越小.定义函数$y=f\left(x\right)$ 的曲率函数$k(x)=\frac{|y''|}{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}$（其中$y'$是$f\left(x\right)$ 的导数，y''是y' 的导数），函数$y=f\left(x\right)$在$x=t$ 处的曲率半径为此处曲率$k\left(t\right)$ 的倒数， 以下结论正确的是

A. 函数$y=\sin x$ 在无数个点处的曲率为 1

B. 函数$f(x)=x^3+2$ ，则曲线在点$(-a,-a^3+2)$ 与点(a,a^3+2) 处的弯曲程度相同

C. 函数$y=e^x$ 的曲率半径随着x 变大而变大

D. 若函数$y=\ln x$ 在$x=t_1$ 与$x=t_2$（ $t_1\ne t_2$ ）处的曲率半径相同，则$t_1t_2<\frac{1}{2}$.

三、填空题：本大题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. 在二项式$\left(\frac{1}{x}-2x\right)^4$的展开式中，常数项为__________.

13. 曲线$f(x)=\frac{\cos x}{1+x}$与曲线$g(x)=(ax+1)e^x$在点$(0,1)$处的切线互相垂直，则$a=$______.

14. $[x]$表示不超过x的最大整数，例如$[-3.5]=-4$，$[2.1]=2$．已知函数$f(x)=[2x+1]-x$与$g(x)=(k+1)x+\frac{k}{2}$的图象恰有两个公共点，则实数k的取值范围是____________.

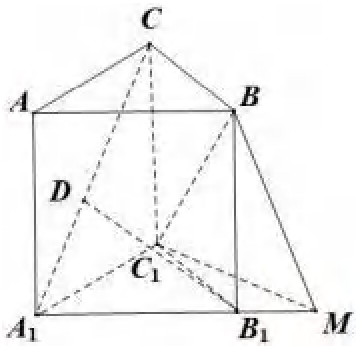
四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15.（13 分）

如图，在三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$AB\perp BC$，四边形A_1B_1BA，B_1BCC_1均为菱形，平面$A_1B_1BA\perp$底面$A_1B_1C_1$，平面$B_1BCC_1\perp$底面$A_1B_1C_1$，M是A_1B_1延长线上一点，且$B_1M=\frac{1}{2}A_1B_1$，D为A_1C中点，连接DB_1.

（1）证明：$DB_1 \parallel$平面BC_1M；

（2）取DB_1中点Q，求A_1Q与平面BC_1M夹角的正弦值.



16.（15 分）

设$f(x)=\sqrt{3}\sin 2x+2\cos^2 x$

（1）求$f(x)$的单调递增区间；

（2）在锐角ΔABC中，角A,B,C的对边分别为a,b,c，若$f\left(\frac{A}{2}\right)=\sqrt{3}+1$，$b=2$，求$\Delta ABC$周长的取值范围.

17. （15 分）

已知：$f(x)=2\ln x+\frac{1}{2}ax^2-(a+3)x+3(a>0)$

（1）证明：$f(x)$ 有两个极值点 x_1,x_2；

（2）对（1）中的两个极值点 x_1,x_2，若 $f(x_1)+f(x_2)\le -a-\frac{1}{4}$，求 a 的取值范围.

18. （17 分）

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2，右顶点和上顶点分别为 P,Q 且 $PF_1=3$. 直线 l 经过 F_1 交 C 于 A,B（A 在 x 轴上方）两点，当 l 垂直于 x 轴时，直线 OA 的斜率是直线 PQ 斜率的 $\sqrt{3}$ 倍；

（1）求 C 的方程；

（2）求 ΔPAB 面积的最大值；

（3）若直线 PA,PB 与 y 轴分别交于 M,N 两点，问 ΔMF_1F_2 的外接圆是否经过点 N，请给出你的判断并说明理由？

19. （17 分）

利用计算机生成随机数来模拟实际生活中的事件，然后估计相关事件发生的概率是概率统计中经常使用的方法。

（1）现在用这种方法生成数列{a_1，a_2，a_3 ，a_4 },满足：$a_i\in\{1，2，3，4，5，6\}$，(i=1，2，d) ,求后三项中每一项都不小于前一项的概率；

（2）利用这种方法生成数列 b_1，b_2，⋯⋯， b_n . 满足：$b_i\in$ {1,2}，(i=1，2，d) 用 p_n 表示未连续出现三次 1 的概率，试求出{p_n}的递推公式；

（3）利用这种方法生成数列{c_n}，{d_n}满足：

①c_i, $d_i\in\{1,2,3,4,5,6\}$，(i=1，2，d) ②当出现“1”时，操作停止.

求{c_n}和{d_n}至多相差一项的概率（当 $0<q<1$ 时，$\sum_{k=2}^{\infty}q^k=0$）

2025 年云学名校联盟高三年级 2 月联考数学试题参考答案

选择题：

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
D	A	B	A	D	B	C	C	AC	BC	ABD

填空题： 12. 24　　13. 0　　14. $\left[-\frac{2}{3},-\frac{1}{2}\right)\cup(1,2]$

【第 12-14 题】评分细则
按照参考答案标准给分。

11.【详解】对于 A，$y'=\cos x, y''=-\sin x$，则$k(x)=\frac{|\sin x|}{(1+\cos^2 x)^{\frac{3}{2}}}$，当$x=\frac{2n-1}{2}\pi, n\in\mathrm{Z}$时，$k(x)=1$，因此函数$y=\sin x$在无数个点处的曲率为 1，A 正确；

对于 B，$f'(x)=3x^2$，$f''(x)=6x$，则$k(x)=\frac{|6x|}{\left[1+(3x^2)^2\right]^{1.5}}$，$k(x)=k(-x)$，则$k(x)$为偶函数，曲线在两点的弯曲程度相同，B 正确；

对于 C，$y'=\mathrm{e}^x, y''=\mathrm{e}^x$，则函数$y=\mathrm{e}^x$的曲率半径$\frac{1}{k(x)}=\frac{(1+\mathrm{e}^{2x})^{\frac{3}{2}}}{\mathrm{e}^x}=\sqrt{\qquad\qquad}\ \mathrm{e}^{-2x}+3$

令$g(x)=\mathrm{e}^{-2x}+3+3\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{4x}$，求导得$g'(x)=-2\mathrm{e}^{-2x}+6\mathrm{e}^{2x}+4\mathrm{e}^{4x}=\frac{2}{\mathrm{e}^{2x}}(2\mathrm{e}^{6x}+3\mathrm{e}^{4x}-1)$，

由$g'(x)=0$，得$x=-\frac{1}{2}\ln 2$，当$x<-\frac{1}{2}\ln 2$时，$g'(x)<0$，则函数$g(x)$在$(-\infty,-\frac{1}{2}\ln 2)$上单调递减，函数$\frac{1}{k(x)}=\sqrt{g(x)}$在$(-\infty,-\frac{1}{2}\ln 2)$上单调递减，C 错误；

对于 D，$y'=\frac{1}{x}, y''=-\frac{1}{x^2}$，则函数$y=\ln x$的曲率半径，$\frac{1}{k(x)}=\frac{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}{x}, x>0$

依题意，$\frac{1}{k(t_1)}=\frac{1}{k(t_2)}$，令$h(x)=\frac{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}{x}, x>0$，则方程$h(x)=t$有两个不等正根$t_1, t_2$，

即直线$y=t$与函数$y=h(x)$的图象有两个交点，$h'(x)=\frac{(2x^2-1)(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}{x^2}$，

当$0<x<\frac{1}{\sqrt{2}}$时，$h'(x)<0$，当$x>\frac{1}{\sqrt{2}}$时，$h'(x)>0$，

函数$h(x)$在$(0,\frac{1}{\sqrt{2}}]$上单调递减，在$[\frac{1}{\sqrt{2}},+\infty)$上单调递增，函数值集合为$[h(\frac{1}{\sqrt{2}}),+\infty)$，

因此当$t>h(\frac{1}{\sqrt{2}})$时，方程$h(x)=t$有两个不等正根t_1, t_2，不妨令$0<t_1<\frac{1}{\sqrt{2}}<t_2$，

因此t_1,t_2不关于$x=\frac{1}{\sqrt{2}}$对称，即$t_1t_2<\frac{1}{2}$，D 正确，

故答案为：ABD

14【详解】.$f(x)=[2x+1]-x=[2x]+1-x$，

$f(x)=g(x)\Leftrightarrow 2x-[2x]=-kx+1-\frac{k}{2}\Leftrightarrow 2x-[2x]=-\frac{k}{2}(2x+1)+1$，

令$t=2x$，则$f(x)=g(x)\Leftrightarrow t-[t]=-\frac{k}{2}(t+1)+1$，

直线$y=-\frac{k}{2}(t+1)+1$过定点$A(-1,1)$，斜率为$-\frac{k}{2}$.

$y=t-[t]=t-n,t\in[n,n+1),n\in Z$，

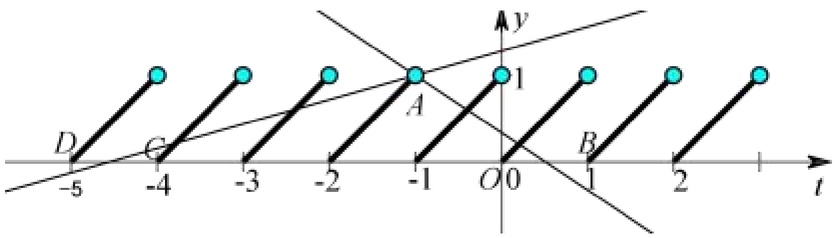
如图，作出函数$y=t-[t]$和$y=-\frac{k}{2}(t+1)+1$的图象，

其中$O(0,0)$，$B(1,0)$，$C(-4,0)$，$D(-5,0)$，

$k_{AO}=-1$，$k_{AB}=-\frac{1}{2}$，$k_{AC}=\frac{1}{3}$，$k_{AD}=\frac{1}{4}$，

依题意，$k_{AO}\le-\frac{k}{2}<k_{AB}$或$k_{AD}<-\frac{k}{2}\le k_{AC}$，$\therefore -1\le-\frac{k}{2}<-\frac{1}{2}$或$\frac{1}{4}<-\frac{k}{2}\le\frac{1}{3}$，

$\therefore -\frac{2}{3}\le k<-\frac{1}{2}$或$1<k\le2$，即实数$k$的取值范围是$\left[-\frac{2}{3},-\frac{1}{2}\right)\cup(1,2]$.



【第 15 题】评分细则

按照参考答案标准给分

15（1）证明：延长A_1M至点N，使得M为B_1N的中点，连接CN，连接CB_1与C_1B交于点E，连接EM.

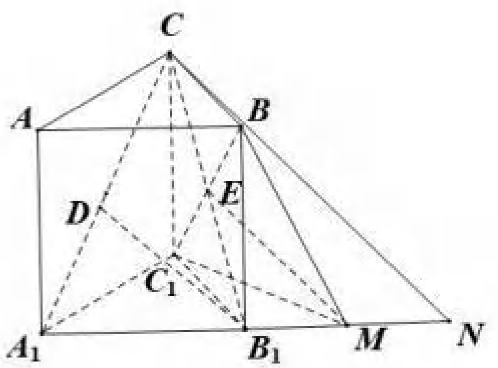
在ΔA_1CN中，$\because D$，B_1分别是A_1C和A_1N的中点，$\therefore DB_1\parallel CN$

在ΔB_1CN中，$\because E$，M分别是CB_1和B_1N的中点，$\therefore EM\parallel CN$

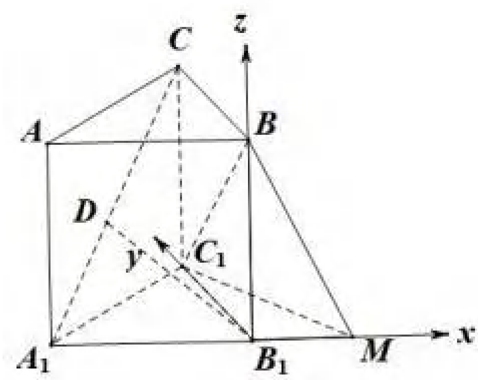
$\therefore DB_1\parallel EM$　　（5 分）

又$\because DB_1\not\subset$平面BC_1M，$EM\subset$平面BC_1M，

$\therefore DB_1\parallel$平面BC_1M　　（6 分）



(2)因为$AB \perp BC$，即 $A_1B_1 \perp B_1C_1$，平面$B_1C_1CB \perp$底面$A_1B_1C_1$，平面$B_1C_1CB \cap$底面$A_1B_1C_1$于B_1C_1，所以$A_1B_1 \perp$平面B_1C_1CB，于是$A_1B_1 \perp B_1B$．同理$B_1C_1 \perp B_1B$．故A_1B_1，B_1C_1，B_1B两两垂直．（8 分）



以B_1为原点，分别以B_1M，B_1C_1，B_1B所在直线为x轴，y轴，z轴建立如图所示的空间直角坐标系，（9 分）

令$A_1B_1 = 2$，$B_1(0,0,0)$，

$A_1(-2,0,0)$，$C(0,2,2)$，$D(-1,1,1)$，$Q\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$，

$B(0,0,2)$，$C_1(0,2,0)$，$M(1,0,0)$，

即$\overrightarrow{A_1Q}=\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$，$\overrightarrow{BC_1}=(0,2,-2)$，$\overrightarrow{C_1M}=(1,-2,0)$

设平面BC_1M的一个法向量为$\vec{n}=(x,y,z)$，$\begin{cases}2y-2z=0\\x-2y=0\end{cases}$得$\vec{n}=(2,1,1)$ （10 分）

设A_1Q与平面BC_1M夹角为θ，$\sin\theta=\frac{\left|\overrightarrow{A_1Q}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{A_1Q}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|}=\frac{4\sqrt{66}}{33}$ （12 分）

即A_1Q与平面BC_1M夹角的正弦值为$\frac{4\sqrt{66}}{33}$． （13 分）

【第 16 题】评分细则

解：（Ⅰ）由题意知：$f(x) = 3\sin 2x + 2\cos^2 x$

$= 2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+1$（......3 分）

由$-\frac{\pi}{2}+2k\pi \le 2x+\frac{\pi}{6} \le \frac{\pi}{2}+2k\pi, k \in Z$，可得$-\frac{\pi}{3}+k\pi \le x \le \frac{\pi}{6}+k\pi, k \in Z$.

所以函数$f(x)$的单调递增区间是$\left[-\frac{\pi}{3}+k\pi,\frac{\pi}{6}+k\pi\right], k \in Z$.（......6 分，开区间也可以，不写$k \in Z$扣 1 分，没写成区间形式扣 1 分）（本问求导解题也可以）

（Ⅱ）由$f\left(\frac{A}{2}\right) = 2\sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right)+1 = 3+1$，得$\sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{2}$.

由题意知A为锐角（未指出是锐角，扣 1 分），所以$A=\frac{\pi}{6}$.（......8 分）

由正弦定理：$\frac{a}{sinA}=\frac{b}{sinB}=\frac{c}{sinC}$,可得：$\frac{a}{sin\frac{\pi}{6}}=\frac{2}{sinB}=\frac{c}{sinC}$. 所以$a=\frac{1}{sinB}$, $C=\frac{2sinC}{sinB}$

所以ΔABC周长 $= a+b+C = 2+\frac{1+2sinC}{sinB}$ （......10 分）

$$=2+\frac{1+2\sin(\frac{5\pi}{6}-B)}{\sin B}$$

$$=2+\quad 3+\frac{1}{tan\frac{B}{2}}$$ （.......12 分）

$\because \begin{cases} 0<B<\frac{\pi}{2} \\ 0<\frac{5\pi}{6}-B<\frac{\pi}{2} \end{cases}$ 可得：$\frac{\pi}{3}<B<\frac{\pi}{2}$. （.......13 分）

$\therefore \frac{\pi}{6}<\frac{B}{2}<\frac{\pi}{4}$. $\therefore \tan\frac{B}{2}\in(\frac{3}{3},1)$（.......14 分） 所以$\Delta ABC$周长的取值范围$(3+\quad 3, 2+2\quad 3)$.（15 分）

【第 17 题】评分细则

解答：（1）$\because f'(x)=\dfrac{ax^2-(a+3)x+2}{x}$,......（1分）

令$g(x)=ax^2-(a+3)x+2$......（2分）

$\because \Delta=(a-1)^2+8>0\rightarrow g(x)$有2个零点$x_1$、$x_2$。

又$\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{a+3}{a}>0 \\ x_1x_2=\dfrac{2}{a}>0 \end{cases}\rightarrow\begin{cases} x_1>0 \\ x_2>0 \end{cases}$......（3分）

不妨设$0<x_1<x_2$, 当$x\in(0,x_1)$, $f'(x)>0$, $f(x)$单调递增。当$x\in(x_1,x_2)$, $f'(x)<0$, $f(x)$单调递减。

当$x\in(x_2,+\infty)$, $f'(x)>0$, $f(x)$递增。$\therefore f(x)$有2个极值点。......（6分）

(2) $\because f(x_1)+f(x_2)=2\ln\frac{2}{a}+1-\frac{a}{2}-\frac{9}{2a}\le -a-\frac{1}{4}\rightarrow 2\ln\frac{2}{a}+\frac{a}{2}-\frac{9}{2a}+\frac{5}{4}\le 0$......（8分）

令$h(a)=2\ln\frac{2}{a}+\frac{a}{2}-\frac{9}{2a}+\frac{5}{4}$, $a\in(0,+\infty)\because h'(a)=\dfrac{a^2-4a+9}{2a^2}>0$......（12分）

$\therefore h(a)$在（0，$+\infty$） 单调递增

又$h(2)=0$ $\therefore 0<a\le 2$......（15分）

【第 18 题】评分细则

18 题第二问用点斜式也是一样给分，第三问四点共圆也可以，方法很多，老师们适当给点步骤分。

18. 解：依题意有，$P(a,0)$，$Q(0,b)$，$A\left(-c,\frac{b^2}{a}\right)$，

因为$k_{OA}=\sqrt{3}k_{PQ}$，则$\dfrac{\frac{b^2}{a}-0}{-c-0}=\sqrt{3}\cdot\dfrac{b-0}{0-a}$，解得$b=\sqrt{3}c$，------（2 分）

故有$\begin{cases} a+c=3 \\ b=\sqrt{3}c \\ b^2+c^2=a^2 \end{cases}$，解得$a=2$，$b=\sqrt{3}$，椭圆方程为$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$（4 分）

（2）设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，l 的方程为$x=my-1$，（说明斜率不为 0，没说明扣 1 分）

联立$\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1\\ x=mv-1\end{cases}$得$(3m^2+4)y^2-6my-9=0$（说明$\Delta>0$）由韦达定理有

$y_1+y_2=\dfrac{6m}{3m^2+4},y_1y_2=\dfrac{-9}{3m^2+4}$，------（6 分）

$|y_1-y_2|=\sqrt{(y_1+y_2)-4y_1y_2}=\sqrt{(\dfrac{6m}{3m^2+4})^2+\dfrac{36}{3m^2+4}}=\dfrac{12\sqrt{m^2+1}}{3m^2+4}$------（8 分）

于是$S=\dfrac{1}{2}PF_1|y_1-y_2|=\dfrac{1}{2}\times 3\times\dfrac{12\sqrt{m^2+1}}{3m^2+4}=\dfrac{18\sqrt{m^2+1}}{3m^2+4}=\dfrac{18}{3\sqrt{m^2+1}+\dfrac{1}{\sqrt{m^2+1}}}$---（9 分）

令$t=\sqrt{m^2+1}\geq 1,y=3t+\dfrac{1}{t}\geq 4,t=1,m=0$时取等号，$S\leq\dfrac{9}{2}$故$\Delta PAB$面积的最大值为$\dfrac{9}{2}$.（10 分）

（3）ΔMF_1F_2的外接圆经过点N.

直线AP的方程为$y=\dfrac{y_1}{x_1-2}(x-2)$令$x=0$，则$y=\dfrac{2y_1}{2-x_1}$，$M\left(0,\dfrac{2y_1}{2-x_1}\right)$

同理可得$N\left(0,\dfrac{2y_2}{2-x_2}\right)$则$\overrightarrow{F_1M}=\left(1,\dfrac{2y_1}{2-x_1}\right)$，$\overrightarrow{F_1N}=\left(1,\dfrac{2y_2}{2-x_2}\right)$，------（12 分）

故有$\overrightarrow{F_1M}\cdot\overrightarrow{F_1N}=1+\dfrac{2y_2}{(3-my_1)}\cdot\dfrac{2y_1}{(3-my_2)}=1+\dfrac{4y_1y_2}{m^2y_1y_2-3m(y_1+y_2)+9}=1+\dfrac{\dfrac{-36}{3m^2+4}}{\dfrac{-9m^2}{3m^2+4}-\dfrac{18m^2}{3m^2+4}+9}=0$即

$F_1M\perp F_1N$，同理可证$F_2M\perp F_2N$，于是ΔMF_1F_2的外接圆经过点N.（17 分）证$F_2M\perp F_2N$一样给分

【第 19 题】评分细则

第 1 问 4 分，第 2 问 6 分，第 3 问 7 分。

第 1 问应只考虑各项可重复的情况，答案写出来即可得 4 分。如果结果错了，但是有过程且过程部分正确，比如算出分母 6 的 4 次方，可以给 1 分。

第 2 问只要写出结果即可给 4 分，如果写清楚了过程可以给 6 分。

第 3 问只要写了过程并有一定道理就可以送 1 到 2 分。

19.(1)概率为$\frac{C_9^4}{6^4}=\frac{7}{72}$ （4 分）

(2)①若第 n 次是 2，则满足要求的概率为$\frac{1}{2}p_{n-1}$（5 分）

②若第 n 次是 1，且第 n-1 次为 2，则满足要求的概率为$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}p_{n-2}$（6 分）

③若第 n 次是 1，且第 n-1 次为 1，则满足要求的概率为$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}p_{n-3}$（7 分）

于是$p_n=\frac{1}{2}p_{n-1}+\frac{1}{4}p_{n-2}+\frac{1}{8}p_{n-3}$　　（10 分）

（3）假设$\{c_n\}$或$\{d_n\}$经过 k 次才会第一次出现“1”，

即前 $k-1$ 次均未出现“1”，其概率为$q_k=(\frac{5}{6})^{k-1}(\frac{1}{6})$（12 分）

当$\{c_n\}$第一次就出现 1 而停止时，$\{d_n\}$须生成一次或生成两次，概率为$q_1(q_1+q_2)$

当$\{c_n\}$第 k 次才停止时，$\{d_n\}$须进行 $k-1$ 次或 k 次，或 $k+1$ 次，其概率为$q_k(q_{k-1}+q_k+q_{k+1})$（14 分）

综上，所求概率

$$P=q_1(q_1+q_2)+\sum_{k=2}^{\infty}q_k(q_{k-1}+q_k+q_{k+1})$$

$$=\frac{1}{6}(\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\times\frac{1}{6})+\sum_{k=2}^{\infty}(\frac{5}{6})^{k-1}\times(\frac{1}{6})\times\left[(\frac{5}{6})^{k-2}\times\frac{1}{6}+(\frac{5}{6})^{k-1}\times\frac{1}{6}+(\frac{5}{6})^{k}\times\frac{1}{6}\right]$$

$P=\frac{1}{6}(\frac{6}{36}+\frac{5}{36})+\Sigma_{k=2}^{\infty}(\frac{5}{6})^{2k-3}\times(\frac{1}{6})^2\times\left[1+\frac{5}{6}+(\frac{5}{6})^2\right]=\frac{8}{33}$（17 分）