数学试卷

注意事项：

1. 答题前，考生务必用黑色碳素笔将自己的姓名、准考证号、考场号、座位号在答题卡上填写清楚.

2. 每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号. 在试题卷上作答无效.

3. 考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回. 满分150分，考试用时120分钟.

一、单项选择题（本大题共8小题，每小题5分，共40分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求）

1. 已知集合 $A=\{x\mid -2<x<2\}$，$B=\left\{x\,\middle|\,\frac{1}{x+1}>\frac{1}{4}\right\}$，则 $A\cap B=$

A. $\{x\mid x<3\}$　　B. $\{x\mid -2<x<2\}$

C. $\{x\mid -2<x<3\}$　　D. $\{x\mid -1<x<2\}$

2. 下列函数中是偶函数的是

A. $f(x)=2\ln x$　　B. $g(x)=\frac{e^{|x|}}{x}$

C. $h(x)=x\sin x$　　D. $p(x)=\cos\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{4}\right)$

3. 已知直线 l_1：$x+(a-1)y+1=0$，直线 l_2：$ax+2y+2=0$，且 $l_1\perp l_2$，则 $a=$

A. $\frac{2}{3}$　　B. $\frac{3}{2}$

C. -1　　D. 2

4. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(-1,2)$，$\boldsymbol{b}=(2,-1)$，则向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 方向上的投影向量

A. $\frac{4}{5}$　　B. $-\frac{4}{5}\boldsymbol{b}$　　C. $\frac{4}{5}\boldsymbol{a}$　　D. $-\frac{4}{5}\boldsymbol{a}$

5. 若 $\sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)=\frac{1}{3}$，则 $\cos\left(2\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)=$

A. $\frac{7}{9}$　　B. $-\frac{7}{9}$

C. $\frac{8}{9}$　　D. $-\frac{8}{9}$

6. 已知数列$\{a_n\}$是公比为 q 的等比数列. 设甲：$q>1$；乙：数列$\{a_n\}$单调递增，则甲是乙的

A. 充分不必要条件　　　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　　　D. 既不充分也不必要条件

7. 已知棱长为 $2a$（单位：cm）的无盖正方体容器内盛有体积为$\frac{24-\pi}{12}$（单位：cm^3）的水，现将一半径为$\frac{a}{2}$（单位：cm）的“实心”铁球放入该正方体容器内，恰好有半个球沉入水中，则静止时该球与水的接触面的面积为

A. π　　B. $\frac{3\pi}{4}$　　C. $\frac{\pi}{2}$　　D. $\frac{\pi}{12}$

8. 已知双曲线 C：$\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{b^2}=1(b>0)$，过点 $P(2,1)$有且仅有一条直线与双曲线 C 的右支相切，则双曲线 C 的离心率的取值范围为

A. $\left(1,\frac{\sqrt{5}}{2}\right]\cup\{\sqrt{2}\}$　　B. $\{\sqrt{2}\}$　　C. $\left(1,\frac{\sqrt{5}}{2}\right]$　　D. $\left[\frac{\sqrt{5}}{2},\sqrt{2}\right)$

二、多项选择题（本大题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分. 在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分）

9. 已知随机变量 X 和 Y，其中 $Y=3X+2$，且 $E(Y)=7$，若 X 的分布列如下表：

X	1	2	3
P	$\frac{1}{2}$		

则下列说法正确的是

A. $m=\frac{1}{4}$　　B. $n=\frac{1}{6}$　　C. $E(X^2)=3$　　D. $D(X)=\frac{5}{9}$

10. 已知函数$f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$的部分图象如图 1 所示，则

A. $\omega=2$

B. $\varphi=\frac{\pi}{6}$

C. 为了得到函数 $y=f(x)$ 的图象，可将函数 $y=2\sin(\omega x)$ 的图象向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度

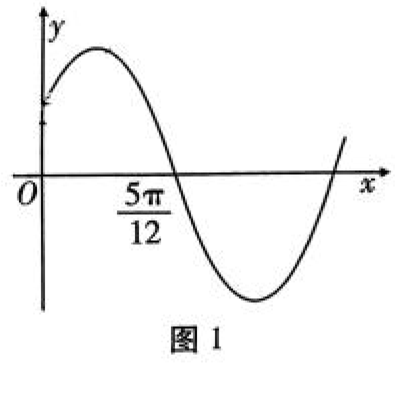

图 1

D. 为了得到函数 $y=f(x)$ 的图象，可将函数 $y=2\sin(\omega x)$ 的图象向左平移$\frac{\pi}{12}$个单位长度

11. 已知函数 $y=f(x)$ 是定义在区间 $[a, b]$ 上的连续函数，若 $\exists k\in(0, +\infty)$，使得 $\forall x_1$，$x_2\in[a, b]$，都有 $|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant k|x_1-x_2|$，则称函数 $y=f(x)$ 是区间 $[a, b]$ 上的"k 类函数". 下列说法正确的有

A. 函数 $f(x)=x^2-x$ 是区间 $[-1, 2]$ 上的"3 类函数"

B. 函数 $f(x)=\sin x-x\cos x$ 是区间 $\left[1, \dfrac{\pi}{2}\right]$ 上的"2 类函数"

C. 若函数 $y=f(x)$ 是区间 $[a, b]$ 上的"k 类函数"，则方程 $f(x)=(k+1)x$ 在区间 $[a, b]$ 上至多只有一个解

D. 若函数 $f(x)$ 是区间 $[0, 1]$ 上的"2 类函数"，且 $f(0)=f(1)$，则存在满足条件的函数 $f(x)$，$\exists x_1$，$x_2\in[0, 1]$，使得 $|f(x_1)-f(x_2)|=2$

三、填空题（本大题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分）

12. 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 若 $S_4=S_8$，$a_9=1$，则 $a_1=$________

13. 若 $(2x+3)^5=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5$，则 $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=$________

14. 如图 2，在棱长为 $\sqrt{6}$ 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，M 为面 A_1BD 上的动点，$|C_1M|=\sqrt{10}$，则动点 M 的轨迹长度为________.

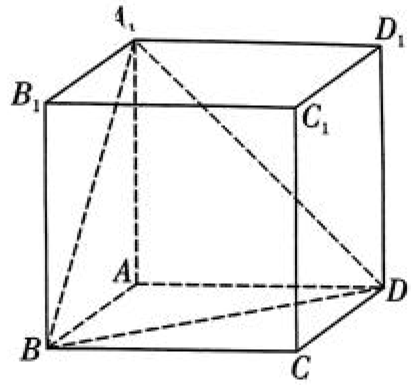

图 2

四、解答题（本大题共 5 小题，共 77 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

15.（本小题满分 13 分）

在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\sin\angle CAB:\sin\angle ABC:\sin\angle ACB=1:\sqrt{2}:\sqrt{5}$. 点 D 在边 AB 上，且 $AC\perp CD$.

（1）求 $\angle ACB$；

（2）若 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 2，求 CD.

16.（本小题满分 15 分）

某校食堂为了解学生对牛奶豆浆的喜欢情况是否存在性别差异，从而更有针对性的为广大学子准备营养早餐，于是随机抽取了 200 名学生进行问卷调查，得到了如下的统计结果：

	喜欢牛奶	喜欢豆浆	合计
男生	45	55	100
女生	65	35	100
合计	110	90	200

（1）根据 $\alpha=0.005$ 的独立性检验，能否认为该校学生对牛奶豆浆的喜欢情况与性别有关？

（2）小红每天都会在牛奶与豆浆中选择一种当早餐，若前一天选择牛奶，则她后一天继续选择牛奶的概率为$\frac{1}{3}$；若前一天选择豆浆，则她后一天继续选择豆浆的概率为$\frac{1}{4}$. 已知小红第一天选择了牛奶，求她第三天选择牛奶的概率.

附：$\chi^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中 $n=a+b+c+d$.

$P(\chi^2\geqslant x_\alpha)$	0.100	0.050	0.010	0.005	0.001
x_α	2.706	3.841	6.635	7.879	10.828

17. (本小题满分 15 分)

已知复数 z 的共轭复数为 $\bar{z}$，且 $|3z+\bar{z}|=4$，复数 z 在复平面内对应的点为 $P(x, y)$.

（1）求点 P 的轨迹方程；

（2）记点 P 的轨迹为曲线 C，点 A 为曲线 C 上任意一点. 设直线 $y=kx$ 与曲线 C 交于 M，N 两点，直线 AM，AN 的斜率分别为 k_1，k_2，求 $|k_1|+2|k_2|$ 的取值范围.

18. (本小题满分 17 分)

如图 3，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是菱形，$\angle BAD=\dfrac{2\pi}{3}$，$PA=AD=2$. 平面 $PAB\perp$ 平面 $ABCD$，$PA\perp BC$. E，F 分别是棱 PA，PB 的中点，G，H 分别在线段 BC，AC 上，且 $\dfrac{BG}{BC}=\dfrac{AH}{AC}=\lambda\left(\lambda<\dfrac{1}{2}\right)$.

（1）证明：E，F，G，H 四点共面；

（2）证明：$PA\perp$ 平面 $ABCD$；

（3）设直线 FG 与直线 EH 交于点 M，当直线 MC 与平面 $EFGH$ 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{2}}{8}$ 时，求 λ 的值.

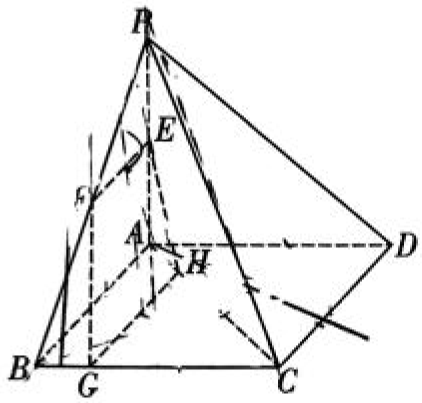

图 3

19.（本小题满分 17 分）

在数学中，布劳威尔不动点定理是拓扑学里的一个非常重要的定理，它是众多不动点定理的基础，得名于荷兰数学家鲁伊兹·布劳威尔. 具体来说就是：对于满足定义域为 D 的连续函数 $f(x)$，若存在 $x_0\in D$，使得 $f(x_0)=x_0$ 成立，则称 x_0 为函数 $f(x)$ 的不动点. 已知 $a>0$ 且 $a\neq 1$，函数 $f(x)=a^{x-1}$.

（1）若 $a=\mathrm{e}$（e 为自然常数），证明：函数 $f(x)$ 只有唯一不动点；

（2）设函数 $g(x)=\dfrac{x^{x+1}}{f(a+1)}\left(x>\dfrac{1}{4}\right)$，且 $\dfrac{\mathrm{e}^{a}-\ln ab}{a}=b-1$. 若函数 $g(x)$ 有且仅有 2 个不动点，求实数 b 的取值范围.

数学参考答案

第Ⅰ卷（选择题，共58分）

一、单项选择题（本大题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的选项中，只有一项是符合题目要求的）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	C	A	B	B	D	C	A

【解析】

1．因为 $A=\{x\mid -2<x<2\}$，$B=\left\{x\left|\dfrac{1}{x+1}>\dfrac{1}{4}\right.\right\}=\{x\mid -1<x<3\}$，所以 $A\cap B=\{x\mid -1<x<2\}$，故选D．

2．对于选项A，定义域为 $(0,+\infty)$，定义域不关于原点对称，所以不是偶函数，所以选项A错误；对于选项B，定义域为 $\{x\mid x\neq 0\}$，$g(-x)=\dfrac{e^{|-x|}}{-x}=-\dfrac{e^{|x|}}{x}=-g(x)$，所以是奇函数，所以选项B错误；对于选项C，定义域为 $\mathbf{R}$，$h(-x)=(-x)\sin(-x)=x\sin x=h(x)$，所以是偶函数，所以选项C正确；对于选项D，定义域为 $\mathbf{R}$，$p(-x)=\cos\left(-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\dfrac{1}{2}x-\dfrac{\pi}{4}\right)\neq p(x)$，所以不是偶函数，所以选项D错误，故选C．

3．因为 $l_1\perp l_2$，所以 $1\times a+2(a-1)=0$，解得 $a=\dfrac{2}{3}$，故选A．

4．向量 $\vec{a}$ 在向量 $\vec{b}$ 方向上的投影向量为 $\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b}=-\dfrac{4}{5}\vec{b}$，故选B．

5．$\cos\left(2\alpha+\dfrac{2\pi}{3}\right)=\cos\left[\pi-2\left(\dfrac{\pi}{6}-\alpha\right)\right]=-\cos 2\left(\dfrac{\pi}{6}-\alpha\right)=2\sin^2\left(\dfrac{\pi}{6}-\alpha\right)-1=-\dfrac{7}{9}$，故选B．

6．因为“公比为 q 的等比数列 $\{a_n\}$ 单调递增”等价于“$a_1>0$，$q>1$ 或 $a_1<0$，$0<q<1$”，所以甲是乙的既不充分也不必要条件，故选D．

7．如图1，由题意，$4a^2\times\dfrac{a}{2}-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{4}{3}\times\pi\times\left(\dfrac{a}{2}\right)^3=\dfrac{24-\pi}{12}a^3=\dfrac{24-\pi}{12}$，解得 $a=1$，所以静止时该球与水的接触面的面积为 $\dfrac{1}{2}\times 4\pi\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{\pi}{2}$，故选C．

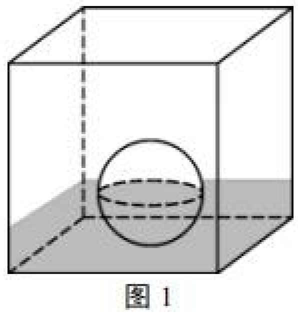

图1

8．如图 2，由题意，点 $P(2,1)$ 在图中阴影部分区域或双曲线 C 的右支上．当点 $P(2,1)$ 在双曲线 C 的右支上时，$\frac{2^2}{3}-\frac{1^2}{b^2}=1(b>0)$，解得 $b^2=3$，此时离心率 $e=\sqrt{1+\frac{3}{3}}=\sqrt{2}$；当点 $P(2,1)$ 在图中阴影部分区域时，$2\times\frac{b}{\sqrt{3}}\leqslant 1$，解得 $b\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$，此时离心率 $1<e=\sqrt{1+\frac{b^2}{3}}\leqslant\frac{\sqrt{5}}{2}$；综上，双曲线 C 的离心率的取值范围为 $\left(1,\frac{\sqrt{5}}{2}\right]\cup\{\sqrt{2}\}$，故选 A.

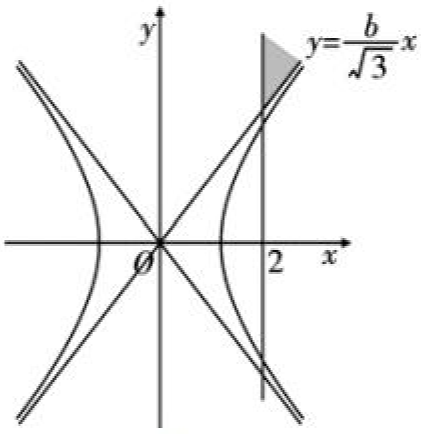

图 2

二、多项选择题（本大题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分．在每小题给出的选项中，有多项是符合题目要求的．全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分）

题号	9	10	11
答案	BD	ABD	ABC

【解析】

9．因为 $Y=3X+2$，$E(Y)=7$，所以 $E(X)=\frac{5}{3}$，即 $1\times\frac{1}{2}+2m+3n=\frac{5}{3}$，化简得 $2m+3n=\frac{7}{6}$，又因为 $\frac{1}{2}+m+n=1$，化简得 $m+n=\frac{1}{2}$，联立解得 $m=\frac{1}{3}$，$n=\frac{1}{6}$，所以 A 错误，B 正确；又因为 $E(X^2)=1^2\times\frac{1}{2}+2^2\times\frac{1}{3}+3^2\times\frac{1}{6}=\frac{10}{3}$，所以 C 错误；又因为 $D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{10}{3}-\frac{25}{9}=\frac{5}{9}$，所以 D 正确，故选 BD.

10．由题意及图象可知，$\begin{cases}\varphi=\frac{\pi}{6}+2k\pi\\ \frac{5\pi}{12}=\frac{5}{12}\times\frac{2\pi}{\omega}\end{cases}(k\in\mathbf{Z})$，又因为 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以 $\omega=2$，$\varphi=\frac{\pi}{6}$，所以选项 A，B 正确；又因为由函数 $y=2\sin(2x)$ 得到函数 $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$，只需将 x 换为 $x+\frac{\pi}{12}$，所以函数 $y=2\sin(2x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度就可以得到函数 $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象，所以选项 D 正确，选项 C 错误，故选 ABD.

11．对于选项A，$\forall x_1$，$x_2\in[-1,2]$，$|f(x_1)-f(x_2)|=|(x_1^2-x_1)-(x_2^2-x_2)|=|x_1+x_2-1|\cdot|x_1-x_2|$ $\leqslant|2+2-1|\cdot|x_1-x_2|=3|x_1-x_2|$，所以选项A正确；对于选项B，“函数$f(x)=\sin x-x\cos x$是区间$\left[1,\dfrac{\pi}{2}\right]$上的‘2类函数’”等价于“$\forall x_1$，$x_2\in\left[1,\dfrac{\pi}{2}\right]$，$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant2|x_1-x_2|$恒成立”，不妨设$x_1\leqslant x_2$，即等价于“$2x_1-2x_2\leqslant f(x_1)-f(x_2)$ $\leqslant2x_2-2x_1$在$\left[1,\dfrac{\pi}{2}\right]$上恒成立”，即“$f(x_1)-2x_1\geqslant f(x_2)-2x_2$”和“$f(x_1)+2x_1\leqslant f(x_2)$ $+2x_2$对$\forall x_1$，$x_2\in\left[1,\dfrac{\pi}{2}\right]$，且$x_1\leqslant x_2$恒成立”，所以等价于“函数$f(x)-2x$在$\left[1,\dfrac{\pi}{2}\right]$上单调递减”且“函数$f(x)+2x$在$\left[1,\dfrac{\pi}{2}\right]$上单调递增”，令$g(x)=f(x)-2x=\sin x-$ $x\cos x-2x$，$h(x)=f(x)+2x=\sin x-x\cos x+2x$，又因为$x\in\left[1,\dfrac{\pi}{2}\right]$时，$g'(x)=x\sin x-2<0$，$h'(x)=x\sin x+2>0$，所以“函数$f(x)-2x$在$\left[1,\dfrac{\pi}{2}\right]$上单调递减”且“函数$f(x)+2x$在$\left[1,\dfrac{\pi}{2}\right]$上单调递增”，即“函数$f(x)=\sin x-x\cos x$是区间$\left[1,\dfrac{\pi}{2}\right]$上的‘2类函数’”成立，所以选项B正确；对于选项C，若方程$f(x)=(k+1)x$在区间$[a,b]$上有两个及以上的解，不妨设其中两个不同的解为x_1,x_2，则$f(x_1)=(k+1)x_1$，$f(x_2)=(k+1)x_2$，所以$f(x_1)-f(x_2)=(k+1)x_1-(k+1)x_2=(k+1)(x_1-x_2)$，所以$|f(x_1)-f(x_2)|=(k+1)|x_1-x_2|>k|x_1-x_2|$，与若函数$y=f(x)$是区间$[a,b]$上的“$k$类函数”矛盾，所以选项C正确；对于选项D，不妨设$x_1,x_2\in[0,1]$，且$x_1\leqslant x_2$，若$x_2-x_1\leqslant\dfrac{1}{2}$，则$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant2|x_1-x_2|\leqslant1$；若$x_2-x_1>\dfrac{1}{2}$，则$|f(x_1)-f(x_2)|=|f(x_1)$ $-f(0)+f(1)-f(x_2)|\leqslant|f(x_1)-f(0)|+|f(1)-f(x_2)|\leqslant2(x_1-0)+2(1-x_2)=2(x_1-x_2+1)$ <1，所以$\forall x_1$，$x_2\in[0,1]$，$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant1$恒成立，所以选项D错误，故选ABC．

三、填空题（本大题共3小题，每小题5分，共15分）

题号	12	13	14
答案	$-\dfrac{11}{5}$	$2882(或5^5-3^5)$	$\dfrac{\sqrt{2}\pi}{2}$

【解析】

12．设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d．因为 $S_4=S_8$，所以 $S_8-S_4=a_5+a_6+a_7+a_8=4a_1+22d=0$；又因为 $a_9=a_1+8d=1$，联立解得 $a_1=-\dfrac{11}{5}$．

13．令 $x=0$，得 $a_0=3^5=243$，令 $x=1$，得 $a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=5^5=3125$，所以 $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=3125-243=2882$．

14．如图 3，连接 AC_1，由正方体的性质可得，$AC_1\perp$ 平面 A_1BD，不妨设垂足为 O，则 $|C_1O|=\dfrac{2}{3}|C_1A|=2\sqrt{2}$，又因为 $|C_1M|^2=|C_1O|^2+|OM|^2$，解得 $|OM|=\sqrt{2}$，所以动点 M 的轨迹是在平面 A_1BD 中，以正 $\triangle A_1BD$ 的中心 O 为圆心，$\sqrt{2}$ 为半径的圆弧，如图 4，即动点 M 的轨迹为劣弧 $\overset{\frown}{EF}$，$\overset{\frown}{GH}$，$\overset{\frown}{PQ}$；如图 5，过 O 作 A_1D 的垂线，垂足为 K，连接 A_1O，在 $\triangle A_1KO$ 中，$\angle OA_1K=30^\circ$，$\angle A_1OK=60^\circ$，$|A_1K|=\dfrac{1}{2}|A_1D|=\sqrt{3}$，所以 $|OK|=\dfrac{1}{\sqrt{3}}|A_1K|=1$，又因为 $|OE|=|OM|=\sqrt{2}$，所以 $\angle EOK=45^\circ$，所以 $\angle A_1OE=15^\circ$，所以 $\angle EOF=30^\circ$，所以动点 M 的轨迹长度为 $l=3\times\dfrac{\pi}{6}\times\sqrt{2}=\dfrac{\sqrt{2}\pi}{2}$．

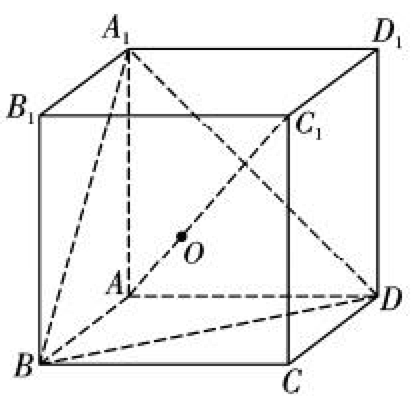

图 3

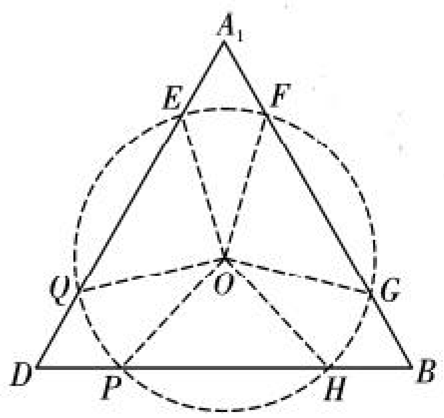

图 4

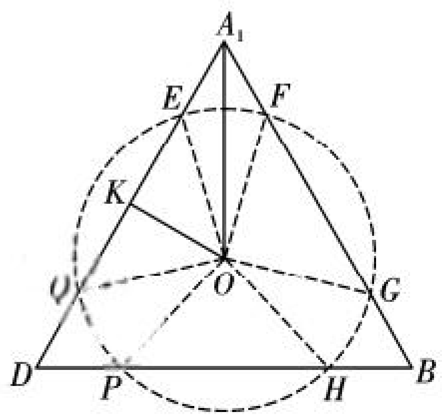

图 5

四、解答题（共 77 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

15．（本小题满分 13 分）

解：（1）在 $\triangle ABC$ 中，$\because \sin\angle CAB:\sin\angle ABC:\sin\angle ACB=1:\sqrt{2}:\sqrt{5}$，

利用正弦定理可得：

$BC:AC:AB=1:\sqrt{2}:\sqrt{5}$．　……………………………（2 分）

设 $BC=k$，则 $AC=\sqrt{2}k$，$AB=\sqrt{5}k$，

利用余弦定理可得：

$$\cos\angle ACB=\frac{AC^2+BC^2-AB^2}{2\cdot AC\cdot BC}=\frac{(\sqrt{2}k)^2+k^2-(\sqrt{5}k)^2}{2\cdot\sqrt{2}k\cdot k}=-\frac{\sqrt{2}}{2},$$

……………………………………（4 分）

又 $\angle ACB\in(0,\ \pi)$，$\therefore\angle ACB=\frac{3\pi}{4}$.　……………………………（6 分）

（2）$\because\sin\angle CAB:\sin\angle ABC:\sin\angle ACB=1:\sqrt{2}:\sqrt{5}$，$\angle ACB=\frac{3\pi}{4}$，

$\therefore\sin\angle CAB=\frac{\sqrt{10}}{10}$，$\sin\angle ABC=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\therefore\tan\angle CAB=\frac{1}{3}$，

……………………………………………（9 分）

在 $\triangle ABC$ 中，利用正弦定理可得：$\frac{AC}{\sin\angle ABC}=4$，

$\therefore AC=4\sin\angle ABC=\frac{4\sqrt{5}}{5}$.　……………………………（11 分）

在 $\mathrm{Rt}\triangle ACD$ 中，$CD=AC\cdot\tan\angle CAB=\frac{4\sqrt{5}}{5}\times\frac{1}{3}=\frac{4\sqrt{5}}{15}$.

……………………………………（13 分）

16.（本小题满分 15 分）

解：（1）设零假设 H_0：该校学生对牛奶豆浆的喜欢情况与性别无关，

…………………………（2 分）

$$\chi^2=\frac{200\times(45\times35-65\times55)^2}{100\times100\times110\times90}=\frac{800}{99}\approx8.081>7.879,$$ ……………………（5 分）

根据 $\alpha=0.005$ 的独立性检验，零假设 H_0 不成立，

即可以认为该校学生对牛奶豆浆的喜欢情况与性别有关. …………………………（7 分）

（2）设“小红第二天选择牛奶”为事件 A，则事件 $\overline{A}$ 表示“小红第二天选择豆浆”；

设“小红第三天选择牛奶”为事件 B.　…………………………（8 分）

根据题意：$P(A)=\frac{1}{3}$，$P(\overline{A})=\frac{2}{3}$，$P(B|A)=\frac{1}{3}$，$P(B|\overline{A})=\frac{3}{4}$，

……………………………………（11 分）

则 $P(B)=P(AB)+P(\overline{A}B)=P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{11}{18}$，

所以小红第三天选择牛奶的概率为 $\frac{11}{18}$.　…………………………（15 分）

17.（本小题满分 15 分）

解：（1）根据题意：$z=x+y\mathrm{i}$，$\bar{z}=x-y\mathrm{i}$，$3z+\bar{z}=4x+2y\mathrm{i}$，

………………………………（2 分）

则 $\sqrt{(4x)^2+(2y)^2}=4$，即 $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$， ………………………………（4 分）

所以点 P 的轨迹方程为 $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$． ………………………………（5 分）

（2）设点 $A(x_0,\ y_0)$，$M(x_1,\ y_1)$，则 $N(-x_1,\ -y_1)$，$k_1=\dfrac{y_0-y_1}{x_0-x_1}$，$k_1=\dfrac{y_0+y_1}{x_0+x_1}$，

于是 $k_1\cdot k_2=\dfrac{y_0-y_1}{x_0-x_1}\cdot\dfrac{y_0+y_1}{x_0+x_1}=\dfrac{y_0^2-y_1^2}{x_0^2-x_1^2}$， ………………………………（8 分）

又点 $A(x_0,\ y_0)$ 与点 $M(x_1,\ y_1)$ 均在曲线 C：$x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$ 上，

所以 $x_0^2+\dfrac{y_0^2}{4}=1$ ①，$x_1^2+\dfrac{y_1^2}{4}=1$ ②， ………………………………（10 分）

将①式与②式相减可得：$x_0^2-x_1^2+\dfrac{y_0^2-y_1^2}{4}=0$，即 $\dfrac{y_0^2-y_1^2}{x_0^2-x_1^2}=-4$，

于是 $k_1\cdot k_2=-4$，则 $|k_1|\cdot|k_2|=4$， ………………………………（12 分）

所以 $|k_1|+2|k_2|\geqslant 2\sqrt{2|k_1|\cdot|k_2|}=4\sqrt{2}$，当且仅当 $|k_1|=2|k_2|=2\sqrt{2}$ 时等号成立，

所以 $|k_1|+2|k_2|$ 的取值范围是 $[4\sqrt{2},\ +\infty)$． ………………………………（15 分）

18.（本小题满分 17 分）

（1）证明：∵E，F 分别是棱 PA，PB 的中点，∴$EF/\!/AB$，

………………………………（2 分）

∵$\dfrac{BG}{BC}=\dfrac{AH}{AC}$，∴$GH/\!/AB$， ………………………………（4 分）

∴$EF/\!/GH$，∴E，F，G，H 四点共面． ………………………………（5 分）

（2）证明：∵底面 $ABCD$ 是菱形，$\angle BAD=\dfrac{2\pi}{3}$，

∴$\angle ABC=\dfrac{\pi}{3}$，$\triangle ABC$ 是等边三角形，

取 AB 中点为 I，连接 CI，则 $CI\perp AB$， ………………………………（7 分）

又平面 $PAB \perp$ 平面 $ABCD$，且平面 $PAB \cap$ 平面 $ABCD = AB$，

$\therefore CI \perp$ 平面 PAB，又 $PA \subset$ 平面 PAB，$\therefore CI \perp PA$， …………………………（9分）

又 $PA \perp BC$，且 $CI \cap BC = C$，$\therefore PA \perp$ 平面 $ABCD$.

…………………………（10分）

（3）解：$\because M \in$ 平面 PBC，$M \in$ 平面 PAC，又平面 $PBC \cap$ 平面 $PAC = PC$，

$\therefore M \in PC$，即直线 MC 就是直线 PC. …………………………（11分）

取 BC 中点为 N，以 A 点为坐标原点，再分别以 AN，AD 和 AP 所在直线为 x 轴，y 轴和 z 轴建立如图6所示的空间直角坐标系：

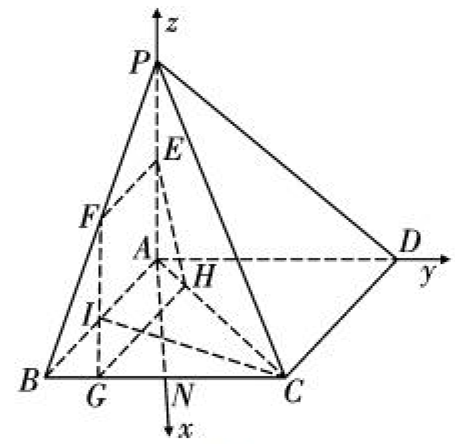

图6

则 $P(0,\ 0,\ 2)$，$C(\sqrt{3},\ 1,\ 0)$，$E(0,\ 0,\ 1)$，$F\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{1}{2},\ 1\right)$，

$\overrightarrow{PC} = (\sqrt{3},\ 1,\ -2)$，$\overrightarrow{EF} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{1}{2},\ 0\right)$，

设 $H(x,\ y,\ 0)$，则 $\overrightarrow{AH} = (x,\ y,\ 0)$，$\overrightarrow{AC} = (\sqrt{3},\ 1,\ 0)$，

由 $\overrightarrow{AH} = \lambda\overrightarrow{AC}$ 可得：$\begin{cases} x = \sqrt{3}\lambda, \\ y = \lambda, \end{cases}$

$\therefore H(\sqrt{3}\lambda,\ \lambda,\ 0)$，$\therefore \overrightarrow{EH} = (\sqrt{3}\lambda,\ \lambda,\ -1)$， …………………………（13分）

设平面 $EFGH$ 的一个法向量为 $\vec{n} = (a,\ b,\ c)$，

则 $\begin{cases} \overrightarrow{EF} \cdot \vec{n} = 0, \\ \overrightarrow{EH} \cdot \vec{n} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2}a - \frac{1}{2}b = 0, \\ \sqrt{3}\lambda a + \lambda b - c = 0, \end{cases}$ 取 $a = 1$，则 $b = \sqrt{3}$，$c = 2\sqrt{3}\lambda$，

$\therefore \vec{n} = (1,\ \sqrt{3},\ 2\sqrt{3}\lambda)$， …………………………（15分）

设直线 MC 与平面 $EFGH$ 所成角为 θ，

则 $\sin\theta = |\cos\langle\overrightarrow{PC},\ \vec{n}\rangle| = \frac{|\overrightarrow{PC} \cdot \vec{n}|}{|\overrightarrow{PC}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|\sqrt{3} + \sqrt{3} - 4\sqrt{3}\lambda|}{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{12\lambda^2 + 4}} = \frac{\sqrt{2}}{8}$，

化简得：$45\lambda^2 - 48\lambda + 11 = 0$，解得：$\lambda = \frac{1}{3}$ 或 $\lambda = \frac{11}{15}$，

又 $\lambda < \frac{1}{2}$，$\therefore \lambda = \frac{1}{3}$. …………………………（17分）

19.（本小题满分 17 分）

（1）证明：当 $a=\mathrm{e}$ 时，$f(x)=\mathrm{e}^{x-1}$，令 $\varphi(x)=\mathrm{e}^{x-1}-x$，则 $\varphi'(x)=\mathrm{e}^{x-1}-1$，

…………………………（1 分）

当 $x\in(-\infty,\ 1)$ 时，$\varphi'(x)<0$，函数 $\varphi(x)$ 单调递减；

当 $x\in(1,\ +\infty)$ 时，$\varphi'(x)>0$，函数 $\varphi(x)$ 单调递增，

…………………………………………………………（3 分）

所以 $\varphi(x)\geqslant\varphi(1)=0$，

即当 $x=1$ 时，$f(x)=x$；当 $x\neq1$ 时，$f(x)>x$ 恒成立，

所以函数 $f(x)$ 只有唯一不动点. …………………………（5 分）

（2）解：根据题意：$g(x)=\dfrac{x^{x+1}}{a^a}$（$x>\dfrac{1}{4}$），

而 $g(x)=x\Leftrightarrow\dfrac{x^{x+1}}{a^a}=x\Leftrightarrow x^x=a^a\Leftrightarrow x\ln x=a\ln a$，

…………………………………………………………（7 分）

令 $h(x)=x\ln x$，则 $h'(x)=\ln x+1$，

当 $x\in\left(\dfrac{1}{4},\ \dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$ 时，$h'(x)<0$，函数 $h(x)$ 单调递减；

当 $x\in\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}},\ +\infty\right)$ 时，$h'(x)>0$，函数 $h(x)$ 单调递增，

…………………………………………………………（9 分）

且 $h\left(\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1}{2}=h\left(\dfrac{1}{2}\right)$， …………………………（10 分）

如图 7 所示，因为函数 $g(x)$ 有且仅有 2 个不动点，

所以方程 $g(x)=x$ 有且仅有 2 个大于 $\dfrac{1}{4}$ 的不同根，

也即函数 $h(x)$ 的图象与 $y=h(a)$ 的图象有两个不同的交点，

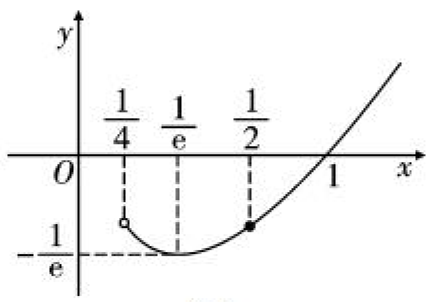

图 7

所以 $\dfrac{1}{4}<a<\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 或 $\dfrac{1}{\mathrm{e}}<a<\dfrac{1}{2}$， …………………………（12 分）

而 $\dfrac{\mathrm{e}^a-\ln ab}{a}=b-1\Leftrightarrow\mathrm{e}^a-\ln ab=ab-a$

$\Leftrightarrow\mathrm{e}^a+a=ab+\ln ab\Leftrightarrow\mathrm{e}^a+\ln\mathrm{e}^a=ab+\ln ab$，

令 $T(x)=x+\ln x$，显然函数 $T(x)$ 单调递增， ……………………………（14分）

所以 $\mathrm{e}^a+\ln\mathrm{e}^a=ab+\ln ab\Leftrightarrow T(\mathrm{e}^a)=T(ab)\Leftrightarrow \mathrm{e}^a=ab\Leftrightarrow b=\dfrac{\mathrm{e}^a}{a}$，

令 $\omega(a)=\dfrac{\mathrm{e}^a}{a}$ （$\dfrac{1}{4}<a<\dfrac{1}{2}$，且 $a\neq\dfrac{1}{\mathrm{e}}$），

则 $\omega'(a)=\dfrac{(a-1)\mathrm{e}^a}{a^2}$，

显然当 $a\in\left(\dfrac{1}{4},\ \dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)\cup\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}},\ \dfrac{1}{2}\right)$ 时，$\omega'(a)<0$，函数 $\omega(a)$ 单调递减，

……………………………………（16分）

而 $\omega\left(\dfrac{1}{4}\right)=4\mathrm{e}^{\frac{1}{4}}$，$\omega\left(\dfrac{1}{2}\right)=2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$，$\omega\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)=\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}+1}$，

所以实数 b 的取值范围是 $\left(2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}},\ \mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}+1}\right)\cup\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}+1},\ 4\mathrm{e}^{\frac{1}{4}}\right)$.

…………………………………………………………（17分）